Spazi vettoriali

① $V=\mathbb{R}^3$ Verifica quale dei seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi:

a) $W=\{(a,a,a)\in V \mid a\in\mathbb{R}\}$ → SI

1. $0\in W$
2. $\lambda\cdot a\in W$, $\lambda\cdot(a,a,a)=(\lambda a,\lambda a,\lambda a)\in W$
3. $v+w\in W$

$(a,a,a)+(a',a',a')=(a+a',a+a',a+a')\in W$

b) $W=\{(a,b,a)\in V \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ → SI

1. $a=b=0$ $(0=(0,0,0)\in W)$
2. $\lambda(a,b,a)=(\lambda a,\lambda b,\lambda a)\in W$
3. $(a,b,a)+(a',b',a')=(a+a',b+b',a+a')\in W$

c) $W=\{(a,2a,a+b)\in V \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ → SI

1. $a=b=0$ $(0=(0,0,0)\in W)$
2. $\lambda(a,2a,a+b)=(\lambda a,2(\lambda a),\lambda(a+b))\in W$
3. $(a,2a,a+b)+(a',2a',a'+b')=(a+a',2a+2a',(a+a')+(b+b'))\in W$

d) $W=\{(a,b,c)\in V \mid a,b,c\in\mathbb{N}\}$ → NO

1. $(0,0,0)\in W$
2. se $\lambda\in\mathbb{N}(\in\mathbb{R})$, allora $\lambda(a,b,c)\notin W$

e) $W=\{(a,b,a+b)\in\mathbb{Q} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ → NO

1. $(0,0,0)\in W$
2. $\lambda\in\mathbb{Q}(\in\mathbb{R})$ esempio $\sqrt{2}$, allora $\lambda(a,b,c)\notin W$

② $V=\mathbb{R}^4$. Stabilire quali è un sott. di V

a) $W=\{(a,b,c,d)\in V \mid a+b+c+d=0\}$ → SI

1. $(0,0,0,0)\in W \Rightarrow 0+0+0+0=0$
2. $(\lambda a)+(\lambda b)+(\lambda c)+(\lambda d)=\lambda(a+b+c+d)=0$ (con $\lambda=0$ e $a,b,c,d=0$)

cioè $\lambda(a,b,c,d)=(\lambda a,\lambda b,\lambda c,\lambda d)\in W$

3. Siano $(a,b,c,d),(a',b',c',d')\in W$

allora $a+b+c+d=a'+b'+c'+d'=0$ dunque

$(a+a')+(b+b')+(c+c')+(d+d')=(a+b+c+d)+(a'+b'+c'+d')\in W$

cioè $(a,b,c,d)+(a',b',c',d')\in W$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

b) $W = \{(a,b,c,d) \in W \mid a = 2\}$ → NO

1. $(a,b,c,d) = (2,b,c,d) \not\Rightarrow (0,0,0,0) \notin W$

Esempi in classe.

- $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} (j+1)^2 \cdot x_j = 0\} = \{5x_1 + 9x_2 + 16x_3 + \ldots = 0\}$

1. $0 \in W$ (Se ad ogni x_j sostituisco lo 0 l'equaz. è verificata)

3. $2 \cdot (5x_1 + 9x_2 + 16x_3 + \ldots = 0) \in W$

2. $(5x_1 + 9x_2 + 16x_3 + \ldots) + (5x_1' + 9x_2' + 16x_3' + \ldots) = 0$

dunque: $(5x_1 + 9x_2 + 16x_3) + (5x_1' + 9x_2' + 16x_3' + \ldots) \in W$

- $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$

1. $0 \in W$

2. NO! Es: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in W \quad (1 \cdot 0 = 0)$

$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \in W \quad (0 \cdot 3 = 0)$

ma $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \notin W \quad (1 \cdot 3 = 3 \neq 0)$

- $W = \{x \in \mathbb{R} = x_2 = x_1^2\}$

1. $0 \in W \quad (0 = (0,0) \Rightarrow 0 = 0^2 = 0)$

2. NO! Es. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in W \quad (1 = 1^2 = 1)$

$\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix} \in W \quad (1 = (-1)^2 = 1)$

ma $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \notin W \quad (2 \neq (0^2)$

Esercizi Veri

- Ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ è prodotto di numeri primi.

Dimostriamo per induzione completa.

- $m = 2$. È prodotto di numeri primi? Sì. ($2 \cdot 1$)
- Supponga che ogni j sia prodotto di primi per $j = 2, \dots, m$

$m+1$ { Primo $(m+1) \cdot 1$; No primo $m+1 = a \cdot b$ con a e $b \geq 2$

$\Rightarrow a, b \leq m$

$\Rightarrow$ sono prodotto di primi ▨

FASTCOPY
Tel. 050/556414

- Esistono infiniti numeri primi.

Per assurdo supponiamo p_1 (=2), p_2 (=3), p_3 (=5) $\dots p_m$ (tutti i primi)

Considero il numero $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{(m+1)}$

So che n è prodotto di numeri primi (dall'es. di prima) ma in particolare è divisibile per qualche primo che chiamo p_j.

Quindi $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_j \cdot \dots \cdot p_{(m+1)}$

ma la divisione $\frac{n}{p_j}$ ha resto 1. Ho trovato l'assurdo ▨

- PRINCIPIO DEL MINIMO

$X \subset \mathbb{N}$ $X \neq \emptyset$ ha minimo,

cioè $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \in X$, $m \leq x$ $\forall x \in X$

Suppongo per assurdo che il minimo non ci sia e dimostro che che $X = \emptyset$ ovvero che $Y = \mathbb{N} \setminus X$ (Y complementare di X) è tutto $\mathbb{N}$, ovvero che $m \notin Y$ $\forall m \in \mathbb{N}$

Ho fatto per induzione completa

- $0 \notin Y$, altrimenti $0 \in X$ sarebbe il minimo
- Supponiamo $0, 1, \dots, m \in Y$ cioè $0, 1, \dots, m \notin X$,

  devo provare che $m+1 \in Y$, altrimenti $m+1 \in X$ è il minimo.

• Dati $n, m \in \mathbb{Z}$ $m \geq 2$ $n \neq 0$

esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ t.c

$$n = m \cdot q + r$$

$$0 \leq r < m$$

- Unicità: devo vedere che se ho $n = m \cdot q_1 + r_1$ $0 \leq r_1 < m$

e $n = m \cdot q_2 + r_2$ $0 \leq r_2 < m$

Allora $q_2 = q_1$ e $r_2 = r_1$ → multiplo di m

Sottraggo n e n: $m(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$

Osservo che $0 \leq |r_1 - r_2| < m$

$\Rightarrow m \cdot (q_1 - q_2) = 0$ $r_2 = r_1$

$\Rightarrow q_1 = q_2$

- Esistenza: sia $R = \{ n - m \cdot q : q \in \mathbb{Z} \} \cap \mathbb{N}$

Noto: $R \neq \emptyset$ (Basta prendere q discorde da n e grande)

- Principio minimo: R ha un minimo $r = n - m \cdot q$

Affermo che $r < m$ (Per costruzione $r \geq 0$)

Per assurdo supponiamo che $r \geq m$, allora

$$n - m \cdot (q + 1) = n - mq - m = r - m$$

è ≥ 0 quindi sta in R

ed è minore del minimo di r. ASSURDO!

• Dati $f(x), g(x) \in R[x]$ con $\deg(g(x)) > 0$ esistono unici $q(x), r(x) \in R[x]$ t.c

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

- Unicità: V

- Esistenza: $R = \{ f(x) - g(x) \cdot q(x) : q(x) \in R[x] \}$

$\Rightarrow 0 \in R$ fondo $r(x) = 0$

$\Rightarrow 0 \notin R$ prendo $k = \min \{ \deg(r(x)) : r(x) \in R \}$

e $r(x) = f(x) - g(x) \cdot f(x)$

ne ho realizzo. $k > 0$ V

Affermo che $k < \deg(g(x)) = m$

- Per assurdo sia $k \geq m$

$g(x) = a_m x^m + \dots$

$r(x) = b_k x^k + \dots$

$f(x) - g(x) \cdot \left(q(x) - \frac{b_k}{a_m} \cdot x^{k-m} \right) =$

$= r(x) - g(x) \cdot \frac{b_k}{a_m} \cdot x^{k-m} =$

$= b_k \cdot x^k + \dots - \frac{b_k}{a_m} \cdot x^{k-m} \cdot a_m \cdot x^m + \dots$

$\blacksquare$ ho grado $\leq k+1$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745